PART3　2次不等式（グラフが共有点をもたないとき）

要点① 2次不等式（グラフが x 軸と共有点をもたないとき）

ここでは，2次関数のグラフが x 軸と共有点をもたないときの2次不等式について考える。

例　2次不等式 $x^2-3x+5>0$，$x^2-3x+5\geqq 0$ を解く。

方程式 $x^2-3x+5=0$　……①の解を求めるために，解の公式を用いると

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{-11}}{2}$$

となり，この方程式は実数解をもたない。このことは，方程式①の　　　　　　について

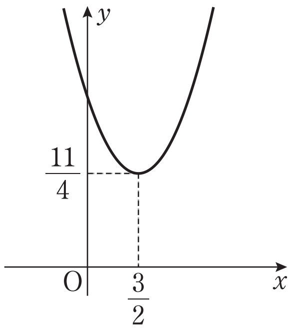
$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot5=-11$$

すなわち，D が　　であることから判断することができる。

このとき，2次関数 $y=x^2-3x+5$　……②について

$$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$$

であることから，②のグラフは右図のように x 軸と共有点をもたず，下に凸の放物線であることから，グラフはすべて x 軸より上側にある。



よって，不等式 $x^2-3x+5>0$ の解は

である。

②のグラフは x 軸と共有点をもたないので，不等式 $x^2-3x+5\geqq 0$ の解についても

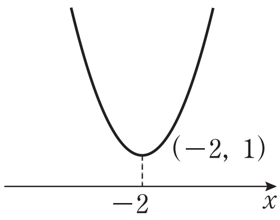
である。

例　2次不等式 $x^2+4x+5<0$，$x^2+4x+5\leqq 0$ を解く。

方程式 $x^2+4x+5=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot5=-1$$

このとき，2次関数 $y=x^2+4x+5$ のグラフは，右図のように下に凸の放物線，かつ x 軸と共有点をもたない。



よって，不等式 $x^2+4x+5<0$ の解は

また，不等式 $x^2+4x+5\leqq 0$ の解についても

2 次関数のグラフが x 軸と共有点をもたないときの 2 次不等式の解は以下となる。

2 次不等式の解（グラフが x 軸と共有点をもたないとき）

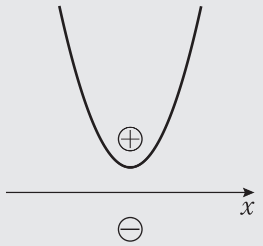
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ のグラフが x 軸と共有点をもたないとき，

$ax^2+bx+c>0$ の解は　すべての実数

$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解は　すべての実数

$ax^2+bx+c<0$ の解は　ない

$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解は　ない



3 次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2+5x+7>0$

(2) $x^2-2x+3 \geqq 0$

(3) $3x^2+4x+3<0$

(4) $-2x^2+x-3 \geqq 0$

Point Pickup

2 次不等式の解法(3)

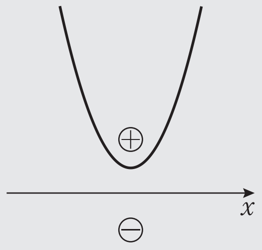
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもたないとき，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは x 軸と共有点をもたない。このとき，$a>0$ とすると

$ax^2+bx+c>0$ の解は　すべての実数

$ax^2+bx+c \geqq 0$ の解は　すべての実数

$ax^2+bx+c<0$ の解は　ない

$ax^2+bx+c \leqq 0$ の解は　ない



第10講　PART3 確認問題

次の２次不等式を解け。

いずれも，①～②のうちから選べ。

1　$x^2-x+4>0$

ア

①　すべての実数　　②　解はない

2　$x^2+4x+7\geqq 0$

イ

①　すべての実数　　②　解はない

3　$2x^2-4x+5<0$

ウ

①　すべての実数　　②　解はない

4　$-x^2+6x-10\geqq 0$

エ

①　すべての実数　　②　解はない

PART3　2次不等式（グラフが共有点をもたないとき）

3　次の２次不等式を解け。

(1)　$x^2+5x+7>0$　　(2)　$x^2-2x+3 \geqq 0$

(3)　$3x^2+4x+3<0$　　(4)　$-2x^2+x-3 \geqq 0$

[解答]

(1)　2次方程式 $x^2+5x+7=0$ の判別式を D とすると

$$D=5^2-4\cdot 1\cdot 7=-3<0$$

x^2 の係数は正であるから，不等式の解は　すべての実数

（別解）$x^2+5x+7=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

よって，不等式の解は　すべての実数

(2)　2次方程式 $x^2-2x+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 3=-2<0$$

x^2 の係数は正であるから，不等式の解は　すべての実数

（別解）$x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$

よって，不等式の解は　すべての実数

(3)　2次方程式 $3x^2+4x+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-3\cdot 3=-5<0$$

x^2 の係数は正であるから，不等式の解は　ない

（別解）$3x^2+4x+3=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{5}{3}>0$

よって，不等式の解は　ない

(4)　$-2x^2+x-3 \geqq 0$ の両辺に -1 をかけて　$2x^2-x+3 \leqq 0$

2 次方程式 $2x^2-x+3=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 3=-23<0$$

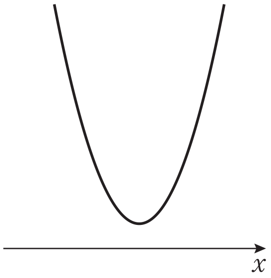
x^2 の係数は正であるから，不等式の解は　ない

（別解）$-2x^2+x-3=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{23}{8}<0$

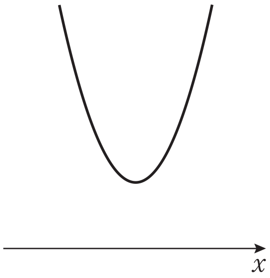
よって，不等式の解は　ない

（参考図）

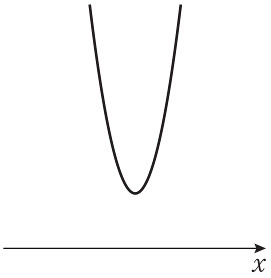
(1)



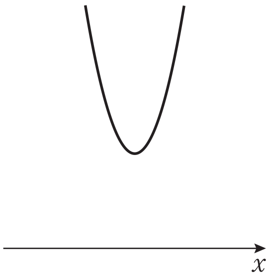
(2)



(3)



(4)



第10講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

2次方程式 $x^2-x+4=0$ の判別式を D とすると，

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot4=-15<0$$

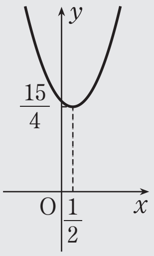
x^2 の係数は正であるから，不等式の解は，[A]

すべての実数

（別解）　$x^2-x+4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$

よって，不等式の解は，**すべての実数**

[A]　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ のグラフが x 軸と共有点をもたないとき，
$ax^2+bx+c>0$ の解と，
$ax^2+bx+c\geqq0$ の解は，
すべての実数



2

[正解] イ：①

[解説]

2次方程式 $x^2+4x+7=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot7=-3<0$$ [B]

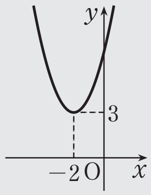
x^2 の係数は正であるから，不等式の解は，

すべての実数

（別解）　$x^2+4x+7=(x+2)^2+3>0$

よって，不等式の解は，**すべての実数**

[B]　2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式を D とすると，
$\frac{D}{4}=b'^2-ac$



3 [正解] ウ：②

[解説]

2 次方程式 $2x^2-4x+5=0$ の判別式を D とすると，

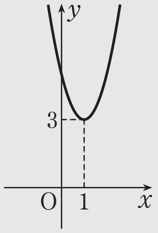
$$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\cdot5=-6<0$$

x^2 の係数は正であるから，不等式の**解はない**。 [C]

（別解）　$2x^2-4x+5=2(x-1)^2+3>0$

よって，不等式の**解はない**。

[C]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ のグラフが x 軸と共有点をもたないとき，
$ax^2+bx+c<0$ の解と，
$ax^2+bx+c\leqq0$ の解は，
　　ない



4 [正解] エ：②

[解説]

$$-x^2+6x-10\geqq0$$

両辺に -1 をかけて， [D]

$$x^2-6x+10\leqq0$$

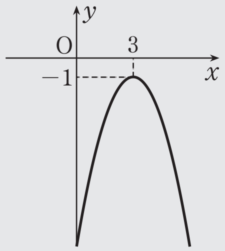
2 次方程式 $x^2-6x+10=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot10=-1<0$$

x^2 の係数は正であるから，不等式の**解はない**。

（別解）　$-x^2+6x-10=-(x-3)^2-1<0$ [E]

よって，不等式の**解はない**。

[D]　x^2 の係数を正にする。

[E]